

2. cvičení - Matematická indukce, výroky, infima a suprema

ℱ = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1 (Matematická indukce). Dokažte následující tvrzení:

- (a) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$.
- (b) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (c) Kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nalezneme pomocí vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- (d) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
- (e) ℱ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $5^n - 1$ dělitelné čtyřmi.

Příklad 2. Tabulkovou metodou dokažte, že následující výroky jsou tautologie.

- (a) $\neg(\neg A) \iff A$ (Zákon dvojí negace)
- (b) ℱ $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ (Princip obměny)
- (c) $A \vee (\neg A)$ (Princip vyloučení třetího)
- (d) $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B)$ (negace implikace)
- (e) $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$ (alternativa implikace)
- (f) ℱ $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$ (tranzitivita implikace)

Příklad 3. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků a znegujte je.

- (a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \implies z > y$ (d) ℱ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$
- (b) ℱ $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y \geq 0 \implies x + y \geq 0$ (e) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q}: y \leq x \wedge x < y + 1$
- (c) ℱ $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$ (f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}: y \leq x \wedge x < y + 1$

Příklad 4. Nechť M značí množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme nyní následující výrokové formy:

- $S(m, z)$: Muž m je manželem ženy z .
- $L_1(m, z)$: Muž m miluje ženu z .
- $L_2(m, z)$: Žena z miluje muže m .

Zapište následující výroky pomocí kvantifikátorů, logických spojek a právě definovaných výrokových forem.



- (a) Každý ženatý muž miluje svou manželku. Následující výroky přeložte do čestiny:
- (b) $\exists$ Každou ženu miluje nějaký muž. (f) $\exists m \in M \forall z \in Z : \neg S(m, z)$
- (c) Každý muž má nejvýše jednu manželku. (g) $\exists z \in Z \forall m \in M : L_1(m, z) \implies \neg L_2(m, z)$
- (d) Existuje vdaná žena. (h) $\exists z \in Z \forall m \in M : L_2(m, z) \implies \neg L_1(m, z)$
- (e) $\exists$ Existuje manželka, která miluje jiného muže, než svého manžela.

Příklad 5. Necht' X, A, B jsou libovolné množiny. Dokažte následující výroky.

- (a) $\emptyset \subseteq A$ (d) $\exists (A \cap B = A) \iff A \subseteq B$
- (b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (e) $X \cup (A \cup B) = (X \cup A) \cup B$
- (c) $\exists A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ (f) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Příklad 6. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

- (a) $A = \{5, 6\}$ (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$
- (b) $B = [-2, 5]$ (e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
- (c) $\exists C = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$ (f) $\exists F = \{x \in \mathbb{R} : x \sin x < 1\}$

Příklad 7. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

- (a) $\exists A = \{\frac{p}{p+q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$ (d) $\exists D = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$
- (b) $B = \{\sin x : x \in (0, \pi)\}$
- (c) $C = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$ (e) $E = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

Příklad 8. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 < 16\}$ (d) $D = \{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} : n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \leq 1\}$
- (c) $\exists C = \{(-1)^n + \frac{1}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$ (e) $\exists E = \{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) : n \in \mathbb{N}\}$

